Lee－Yangの定理の一般化（2）

東大教養物理　浅野太郎

（5月2日受理）

〔1〕 前報（以下〔I〕）で我々はLee－Yangの定理がSpin 1の場合も成立する事を示した。ここでは任意のSpinの場合になりたついくつかの定理を証明した後，Spin $\frac{3}{2}$ についてLee－Yangの定理の証明を行う。

Spin Sの場合の状態和を考える為に〔I〕と同じく各格子点に異る磁場がかかっている場合の状態和 $F_n^{(s)}(z_1, \cdots z_n)$ を考える。

$$z_i = \exp[-h_i/T]$$

で h_i は適当な単位ではかった磁場，Tは温度である。

$(A_s, A_{s-1}, \cdots A_\sigma \cdots A_{-s})$ を $(1, 2, \cdots n)$ の任意の順列とし，$A_\sigma = ([\sigma]_1, \cdots [\sigma]_{n_\sigma})$ はSpin σ をもつSpinの番号とする。

$[\sigma]_i$ $(i = 1, 2, \cdots n_\sigma)$ は $(1, 2, \cdots n)$ のうちの一つで，A_σ に属する。この時状態和 $F_n^{(s)}$ は，

$$\begin{aligned} F_n^{(s)}(z_1, \cdots z_n) &= \sum_{(\Sigma n_\sigma = n)} (n_s! n_{s-1}! \cdots n_\sigma! \cdots n_{-s}!)^{-1} \\ &\times \sum^{\langle p \rangle} \prod_{\sigma=-s}^{s} \prod_{i>j=1}^{n_\sigma} y_{\sigma\sigma}([\sigma]_i, [\sigma]_j) \\ &\times \prod_{\sigma_2 > \sigma_1} \prod_{i'=1}^{n_{\sigma_1}} \prod_{j'=1}^{n_{\sigma_2}} y_{\sigma_1\sigma_2}([\sigma_1]_{i'}, [\sigma_2]_{j'}) \\ &\times \prod_{\sigma'=-s}^{s} \prod_{j''=1}^{n_{\sigma'}} z_{[\sigma']_{i''}}^{\sigma'} \end{aligned} \tag{1.1}$$

ここに，

$$y_{\sigma\sigma'}([\sigma]_i, [\sigma']_j) = \exp[K_{[\sigma]_i [\sigma']_j}^{\sigma\sigma'}]$$

で，$K_{ij} = J_{ij}/T > 0$　J_{ij} は (ij) Spinの交変相互作用である。$\sum^{\langle p \rangle}$

は凡ゆる順列に関して和をとる事を意味する。$F_n^{(s)}$ について次の漸下式が成立する。

＜ Theorem 1 ＞

$$F_n^{(s)}(z_1, z_2 \cdots z_n) = \sum_{\sigma=-s}^{s} F_{n-1}(x_{12}^{-\sigma} z_2 \cdots x_{1n}^{-\sigma} z_n) z_1^{\sigma} \tag{1.2}$$

ここに

$$x_{ij} = x_{ji} = x(ij) = \exp\left[-K_{ij}\right]$$

$$1 > x_{ij} > 0$$

＜ Proof ＞ あきらかに，$F_n^{(s)}$ は次の形をもつ。

$$F_n^{(s)}(z_1, \cdots z_n) = \sum_{\sigma=-s}^{s} f_\sigma z_1^{\sigma} \tag{1.3}$$

f_σ は1番目の Spin が σ である様な配置から寄与だから，

$$f_\sigma = \sum_{\langle \Sigma n_\sigma = n \rangle} (n_s! n_{s-1}! \cdots n_\sigma! \cdots n_{-s}!)^{-1}$$

$$\times \sum_{|\in A_\sigma}^{\langle p \rangle} \prod_{\gamma'' \neq \sigma} \prod_{i'' > j''} y_{\gamma''\gamma''}([\gamma'']_{j''}, [\gamma'']_{j''})$$

$$\times \sum_{\substack{\gamma_1', \gamma_2' \neq \sigma \\ \gamma_1' > \gamma_2'}} \prod_{i'} \prod_{j'} y_{\gamma_1', \gamma_2'}([\gamma_1']_{i'}, [\gamma_2']_{j'})$$

$$\times \prod_{\substack{[\sigma]_i, [\sigma]_j \neq | \\ i > j}} y_{\sigma\sigma}([\sigma]_i, [\sigma]_j)$$

$$\times \prod_{\gamma' \neq \sigma} \prod_{[\sigma]_{\ell'} \neq 1} \prod_{k'} y_{\sigma\gamma'}([\gamma']_{k'}, [\sigma]_{\ell'})$$

$$\times \prod_j y_{\sigma\sigma}(1, [\sigma]_j) \prod_{\gamma'} \prod_{k'} y_{\sigma\gamma'}(1, [\gamma']_{k'}) \prod_{\gamma} \prod_{k} x^{\sigma\gamma}(1, [\sigma]_k)$$

$$\times \prod_{[\sigma]_k \neq |} \prod_{\gamma} z_{[\gamma]_k}^{\gamma} x^{-\sigma\gamma}(1, [\sigma]_k)$$

$$= F^{(s)}_{n-1}(x_{12}^{-\sigma} z_2, \cdots x_{1n}^{-\sigma} z_n) \tag{1.4}$$

＜T 1＞を用いて，Lee－Yang の Lemma 即ち，次の＜T 2＞を証明する。

＜ Theorem 2 ＞ $F^{(s)}_n(z_1, \cdots, z_n) = 0$，

$$|z_1| \geqq 1,\ |z_2| \geqq 1, \cdots, |z_n| \geqq 1$$

なら $$|z_1| = |z_2| = \cdots = |z_n| = 1 \tag{1.5}$$

数学的帰納法で証明する。次の仮説をおく。

＜H 1＞ $n-1$，$n-2$ については ＜T 2＞ が成立。

＜H 2＞ $|z_1| > 1$，$|z_2| \geqq 1 \cdots |z_n| \geqq 1$ があって，

$$F^{(s)}_n(z_1, \cdots z_n) = 0 \tag{1.6}$$

$n=1$ の時，

$$F^{(s)}_1 = z^s + z^{s-1} + \cdots + z^{-s} \tag{1.7}$$

だから＜T 2＞が成立，$n=2$ の場合の証明は後の方で与える。

＜H 2＞が自己矛盾に導く事を示すのだがまず次の定理から初めよう。

＜ Theorem 3 ＞ ＜H 1＞ ＜H 2＞ がなりたつならば，実数の $\theta_1, \theta_2 \cdots \theta_n$ と $r>1$ があって，

$$F^{(s)}_n(re^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}, \cdots e^{i\theta_n}) = 0 \tag{1.8}$$

に出来る。

＜ Proof ＞ 〔I〕で行った様に，我々は，$F^{(s)}_n(z_1, \cdots z_n) = 0$ を充す $z_1, \cdots z_n$ を固定しておいて，z_2 を z_1 の函数と考え，$|z_1| \to \infty$ の時の z_2 の極限値 ζ_2 が $|\zeta_2| < 1$ を充す事を示す。＜T 1＞を用いて $F^{(s)}_n = 0$ より，

$$\sum_{\sigma=-s}^{s} z_2^{\sigma} F_{n-1}^{(s)}(x_{21}^{-\sigma} z_1, \cdots x_{2n}^{-\sigma} z_n) = 0 \tag{1.9}$$

$$\sum_{\sigma=-s}^{s} z_2^{\sigma} z_1^{s} \left[F_{n-2}^{(s)}(x_{23}^{-\sigma} x_{13}^{-s} z_3, \cdots x_{2n}^{-\sigma} x_{1n}^{-s} z_n) \right.$$

$$\left. + \varepsilon(z_1, z_3, \cdots z_n) \right] = 0 \tag{1.10}$$

$$\lim_{|z_1| \to \infty} \varepsilon(z_1, z_3 \cdots z_n) = 0 \tag{1.11}$$

を得る。

ここで我々は，次の Lemma を証明する。

＜Lemma 1＞　$s \leqq 2$ の時は，（1.9）を充す $z_2(z_1)$ は $|z_1| \to \infty$ の時，

$$Z_2(z_1) \to z_1^{p}$$

とゆう漸近形をもつ。pは実数である。証明は簡単である。よく知られている様に，四次式までは多項式の根は代数的方法で求める事が出来る。$s \leqq 2$ なら（1.9）は z_2 に関して四次以下の多項式に書ける。根が代数的方法で求められるとゆう事は，方程式の係数に加減乗除及びべき根をとるとゆう操作を有限回行って根が得られるとゆう事である。

（1.9）の各係数は，z_1 の有理式であり，各々 $|z_1| \to \infty$ では，$\to z_1^{p'}$ とゆう漸近形をもつ。加減乗除及びべき根をとるとゆう操作は，全て $|z_1| \to \infty$ の時の漸近形が，z_1 のべきになるとゆう性質を変えないから，これらの操作の有限の結合でえられる（1.9）の根は，$|z_1| \to \infty$ で，z_1 のべきに漸近する。

この時，z_2 の極限 ζ_2 が $|\zeta_2| < 1$ を充す事は，次の様にして明白である。（1.9）または（1.10）の左辺を z_1 の函数と考えると，z_2 は $|z_1| \to \infty$ で z_1^{p} に漸近するのだから，（1.9）の各項は，全て z_1 のあるべきに漸近し，しかも，最高次のべきは有限である。従って，$|z_1| \to \infty$ で（1.9）（1.10）がなりたつ為には，その最高次の係数が零にならねばならぬ。（1.10）で $z_1^{s} z_2^{s}$ の係数の第一項は〔I〕と同様にして＜H 1＞がなりた

つかぎり零にはならぬから，$z_2 \to z_1^p (p \geqq 0)$ なら $P = 0$ である。
$(P < 0$ であれば $\zeta_2 = 0)$ そこで ζ_2 は，

$$\sum_{\sigma=-s}^{s} \zeta_2^{\sigma} F_{n-2}^{(s)}(x_{23}^{-\sigma} x_{13}^{-s} z_3, \cdots, x_{2n}^{-\sigma} x_{1n}^{-s}) = 0$$

即ち，

$$F_{n-1}^{(s)}(x_{12}^{-s}\zeta_2, \cdots x_{1n}^{-s} z_n) = 0 \tag{1.12}$$

を充す。〔I〕と同様にして，これから $|\zeta_2| < 1$ が導かれる。

$|z_1| > 1$ なら (1.9) の各係数は z_1 の連続函数であり，また z_2^s の係数は零にならぬから，よく知られている多項式の根の係数に関する連続性により，z_1 を変化させた時 z_2 も連続的に変化し，$|z_2| \geqq 1$ から出発し $|\zeta_2| < 1$ に至るのだから途中で $|z_2| = 1$ になる所がある。このやり方を各変数についてくり返して，

$$F_n^{(s)}(r e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}, \cdots e^{i\theta_n}) = 0 \tag{1.13}$$

$$r > 1 \tag{1.14}$$

を充す $r > 1$ と $\theta_1, \theta_2 \cdots \theta_n$ がある事になる。

〔2〕 (1.13) (1.14) を充す $r, \theta_1 \cdots \theta_n$ がない事を云えばよい。

$$F_n^{(s)}(z_1, \cdots z_n) = 0 \tag{3.1}$$

に ＜T 1＞ を用いて，

$$\sum_{\sigma=-s}^{s} z_1^{\sigma} F_{n-1}^{(s)}(x_{12}^{-\sigma} e^{i\theta_2}, \cdots x_{1n}^{-\sigma} e^{i\theta_n}) = 0 \tag{3.2}$$

$$F_m^{(s)}(z_1^{-1}, \cdots z_m^{-1}) = F_m^{(s)}(z_1, \cdots z_m) \tag{3.3}$$

$$F_m^{(s)}(z_1^{*}, \cdots z_m^{*}) = F_m^{*(s)}(z_1, \cdots z_m) \tag{3.4}$$

を用いれば，(3.2) は，

$$\sum_{\sigma=-s}^{s} a_\sigma \, z_1^{s+\sigma} = 0 \tag{3.5}$$

$$a^*_\sigma = a_{-\sigma} \tag{3.6}$$

とかける。＜H 1＞により $F^{(s)}_{n-1}$ は＜T 2＞に従うが，この為，（3.5）の各係数は次の制限をうける事になる。即ち，

$$|a_s| \geqq |a_{s-1}| \geqq \cdots \geqq |a_{s-[s]}| \tag{3.7}$$

〔s〕はsの整数部分である。

これを示す為に，我々は〔I〕の（定理4）をもっと強い形で表わしておこう。

＜Theorem 4＞　$F^{(s)}_m$ が＜T 2＞を充すなら，任意の $t_1 \geqq 1$，$t_2 \geqq 1$，$\cdots$ $t_m \geqq 1$ と実数 $\theta_1, \cdots \theta_m$ について，

$$|F^{(s)}_m(t_1 e^{i\theta_1}, \cdots t_m e^{i\theta_m})|$$

は，各変数 $t_1, t_2, \cdots t_m$ に関して単調に増加する。従って，$t_1 \geqq t_1'$，$t_2 \geqq t_2'$ $\cdots$ $t_m > t_m'$ ならば，

$$|F_m(t_1 e^{i\theta_1}, \cdots, t_m e^{i\theta_m})| \geqq |F_m(t_1' e^{i\theta_1}, \cdots t_m' e^{i\theta_m})| \tag{3.9}$$

＜Proof＞　$z_1^s F_m(z_1, \cdots z_m)$ は z_1 に関して2S次多項式であり，$|z_2| \geqq 1 \cdots |z_m| \geqq 1$ なら，その根は全て単位円内にある。実際，

$|z_1| > 1$　なる根があれば，

$$|z_1| > 1, \quad |z_2| \geqq 1 \quad \cdots \quad |z_m| \geqq 1$$

$$F^{(s)}_m(z_1, \cdots z_m) = 0$$

を充す $z_1 \cdots z_m$ があることになり $F^{(s)}_m$ が＜T 2＞を充す事と矛盾する。従って $F^{(s)}_m$ は次の形をとる。

$$F_m^{(s)}(z_1, \cdots z_m) = A \prod_{k=1}^{2s} \left(z_1 - \frac{\alpha_k}{z_1} \right) \tag{3.10}$$

$$|\alpha_k| \leqq 1$$

$|z_1| = t_1 \geqq 1$ とすれば，

$$|F_m^{(s)}(t_1 e^{i\theta_1}, \cdots)/A|^2 = \prod_{k=1}^{2s} \left(t_1 + \frac{|\alpha_k|^2}{t_1} - 2|\alpha_k| \cos\phi_k \right) \tag{3.11}$$

これはあきらかに，$t_1 \geqq 1$　$|\alpha_k| \leqq 1$ では t_1 に関して単調増加である。各変数について同じ事が云えるから，何の変数に関しても単調増加である。

（3.5）の係数は，

$$|a_\sigma| = |F_{n-1}^{(s)}(x_k^{-\sigma} e^{i\theta_2}, \cdots x_{1n}^{-\sigma} e^{i\theta_n})|$$

であり，＜H 1＞により $F_{n-1}^{(s)}$ は＜T 2＞に従う。また，

$$x_{1k}^{-s} > x_{1k}^{-s+1} > \cdots > x_{1k}^{-s+[s]} \geqq 1 \qquad (k=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$$

だから，＜T 4＞により，（3.7）がなりたつ。

〔4〕　以上の準備をしておいて，Spin $\frac{3}{2}$ の場合＜T 2＞がなりたつ事を示す。（3.5）は，この場合，三次式になる。その根を α，β，γ とし

$$\alpha = r\, e^{i\phi} \qquad r > 1 \tag{4.1}$$

とする。（3.6）より，$r e^{i\phi}$ が根なら，$r^{-1} e^{i\phi}$ も根である事がわかる。また，

$$|\alpha\beta\gamma| = 1$$

だから，

$$\alpha = r\, e^{i\phi}, \quad \beta = r^{-1} e^{i\phi} \quad |\gamma| = 1$$

と表わせる。

一方，

$$|\alpha+\beta+\gamma| = \left| a^{\frac{1}{2}} \Big/ a^{\frac{3}{2}} \right| \tag{4.2}$$

であるが，(3.7)を用いれば，これから，

$$|r+r^{-1}+e^{i\phi'}| = \left| a^{\frac{1}{2}} \Big/ a^{\frac{3}{2}} \right| \leqq 1 \tag{4.3}$$

$$r+r^{-1} > 2$$

だから，(4.3)がなりたつ筈がない。結局我々は，次の定理を証明した事になる。

<Theorem 5>　$F_2^{(\frac{3}{2})}$ が<T 2>を充すなら，$F_n^{(\frac{3}{2})}$ も<T 2>を充す。

ところが，$F_2^{(\frac{3}{2})}$ が<T 2>を充す事は，今までの話から明白である。今，$F_2^{(\frac{3}{2})}$ に関して<H 2>がなりたつとしよう。

$$F_2^{(\frac{3}{2})}(z_1, z_2) = 0 \tag{4.4}$$

に<T 1>を用いて，<T 3>の証明で述べた事に注意すれば，$|z_1| \to \infty$ の時の z_2 の極限値 ζ_2 は，

$$F_1^{(\frac{3}{2})}(x_{12}^{-\frac{3}{2}}\zeta_2) = 0 \tag{4.5}$$

を充す事が直ちに分る。これから $|\zeta_2| < 1$ がえられ，前と同様にして，

$$F_2^{(\frac{3}{2})}(r e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}) = 0$$

$$r > 1$$

を充す r，θ_1，θ_2 がある事になるが，これが不可能な事は今示した通りである。